АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ СБОРНИК 1973

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1974

УДК 530.12

Ответственный редактор

В. Л. ГИНЗБУРГ

Составитель

У. И. ФРАНКФУРТ

Э $\frac{20402-186}{055(02)-74}$ 414-74

Издательство «Наука», 1974 г.

СОДЕРЖАНИЕ

А. Е. Каплан

О ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИХ СВОЙ ВИД ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ ОДНОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

Как известно, наличие материальной среды (или системы тел) приводит к появлению выделенной системы отсчета, связанной с этой средой, что соответствует принципиальной возможности обнаружить движение наблюдателя относительно среды.

Можно, однако, показать, что для сред определенного типа приведенное выше утверждение несправедливо. Нахождение класса таких сред имеет определенный методологический интерес для специальной теории относительности, поскольку, если будут указаны все возможные среды, обладающие таким свойством, то тем самым приведенное выше утверждение, являвшееся по существу неявным постулатом, может считаться доказанным для всех остальных физически реализуемых сред.

Движение наблюдателя относительно среды может быть обнаружено лишь в результате измерения каких-либо параметров среды в системе наблюдателя, величина же любого параметра может быть вычислена с помощью функции распределения частиц среды в фазовом пространстве, поскольку именно это распределение (или какой-либо его аналог) полностью описывает состояние системы.

Таким образом, задача об отыскании среды, равномерно-прямолинейное движение относительно которой принципиально невозможно обнаружить, сводится к нахождению таких функций распределения в фазовом пространстве (или их эквивалентов), которые сохраняют свой вид при переходе из одной инерциальной системы в любую другую. Последняя задача становится тривиальной, если известны формулы преобразования функций распределения при таких переходах; в частности, для функции распределения в фазовом пространстве $g'(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, определяемой соотношением

$$dN_{\mathbf{p},\mathbf{r}} = g(\mathbf{p}, \mathbf{r})\, dV_{\mathbf{p}}\, dV_{\mathbf{r}} = g(\mathbf{p}, \mathbf{r})\, d\Omega, \tag{1}$$

где $dN_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ — число частиц среды, обладающих координатой $\mathbf{r}$ и импульсом $\mathbf{p}$ в элементе фазового объема $d\Omega = dV_p dV_r$, причем $dV_p = dp_x dp_y dp_z$ — элемент импульсного пространства, $dV_r = dxdydz$, можно получить [1] следующую формулу преобразования:

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = g'(\mathbf{p}', \mathbf{r}') = \mathrm{inv}, \tag{2}$$

где штрихованные величины относятся к новой инерциальной системе отсчета, движущейся относительно нештрихованной системы с постоянной скоростью, а $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{r}'$ связаны с $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ преобразованиями Лоренца. Кроме того, из (1) и (2) с учетом инвариантности $dN_{\mathbf{p},\mathbf{r}}$ следует инвариантность элемента фазового объема [1]

$$d\,\Omega = d\,\Omega' = \mathrm{inv}. \tag{3}$$

Приведем здесь простой вывод этих соотношений, не используя сложных геометрических образов, привлекаемых в [1]. Согласно [2, стр. 41]

$$\frac{dV_p}{E} = \frac{dV_{p'}}{E'} = \mathrm{inv}, \tag{4}$$

где $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ — энергия частицы, m — масса покоя; с другой стороны, для элемента конфигурационного объема dV_r справедлива формула

$$dV_r = dV_r^0\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{mc^2}{E}\, dV_r^0,$$

где v — скорость частицы; dV_r^0 — элемент объема, занимаемый частицами в той системе отсчета, где они покоятся. Поскольку dV_r^0 по определению есть величина постоянная, то

$$EdV_r = E'dV'_{r'} = \mathrm{inv}. \tag{5}$$

Перемножая (4) и (5), получаем формулу (3), откуда следует и (2).

Зачастую удобно задавать подпространство импульсов с помощью сферических координат, при этом импульсный элемент объема записывается в виде $dV_p = p^2 dp dO$, где p — абсолютная величина вектора $\mathbf{p}$, а dO — элемент телесного угла для направления вектора $\mathbf{p}$. В этом случае функция распределения $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ может быть записана как

$$dN_{\mathbf{p},\mathbf{r}} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})\, dp dO dV_r. \tag{6}$$

Поскольку в силу (3) $p^2dpdOdV_r = \mathrm{inv}$, то $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})/p^2 = \mathrm{inv}$, и формула преобразования для $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ имеет вид

$$\rho'(\mathbf{p}', \mathbf{r}') = (p'/p)^2 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \tag{7}$$

Если заменить подпространство импульсов подпространством скоростей, задаваемым с помощью сферических координат (т. е. $dV_v = v^2dvdO$), то для этого случая можно ввести функцию распределения $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, эквивалентную функциям g и ρ в смысле полноты описания системы и определяемую соотношением

$$dN_{\mathbf{v},\mathbf{r}} = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{r})\, dvdOdV_{\mathbf{r}}. \tag{8}$$

Записав dv в виде $dv = \frac{m^2c^6}{E^3}dp$ и учитывая, что $p^2dpdOdV_r = \mathrm{inv}$, получаем $\frac{\eta(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{p^2E^3} = \mathrm{inv}$, или $\frac{\eta(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{v^2E^5} = \mathrm{inv}$, откуда следует формула преобразования для $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{r})$:

$$\eta'(\mathbf{v}', \mathbf{r}') = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^3 \eta(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^5 \eta(\mathbf{v}, \mathbf{r}). \tag{9}$$

Аналогичным образом, вводя функцию распределения μ по энергиям так, чтобы она описывала число частиц, обладающих энергией E и вектором импульса, направление которого лежит в пределах телесного угла dO, т. е.

$$dN_{E\frac{\mathbf{p}}{p},\mathbf{r}} = \mu\left(\frac{\mathbf{p}}{p}, \mathbf{r}\right) dEdOdV_{\mathbf{r}}, \tag{10}$$

и записывая dE в виде $dE = \frac{pc^2}{E}dp$ с учетом $p^2dpdOdV_r = \mathrm{inv}$, получаем $\mu\left(E\frac{\mathbf{p}}{p}, r\right)\Big/ pE = \mathrm{inv}$, откуда следует формула преобразования

$$\mu'\left(E'\frac{\mathbf{p}'}{p'}, r\right) = \frac{p'E'}{pE}\mu\left(E\frac{\mathbf{p}}{p}, r\right). \tag{11}$$

Из соотношений (7) и (11) следует формула преобразования распределения числа фотонов фотонного газа по частотам ν ($E = pc = \hbar\nu$):

$$\rho'(\nu') = \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \rho(\nu). \tag{12}$$

Располагая этими формулами преобразований, нетрудно получить любую из шестимерных функций распределения для интересующего нас случая. В частности, для функции распределения в фазовом пространстве $g(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ требование сохранения ее вида в любой инерциальной системе состоит в равенстве $g'(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = g(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, т. е. с учетом (2) $g(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = g(\mathbf{p}', \mathbf{r}')$; поскольку последнее равенство должно выполняться при произвольной скорости одной системы относительно другой, то искомая функция распределения определяется равенством

$$g_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathrm{const}, \tag{13}$$

т. е. среды с интересующим нас свойством должны быть однородны в фазовом пространстве. Такое распределение соответствует газу, нагретому до бесконечно большой температуры, что следует, например, из формулы для распределения частиц по импульсам для релятивистского газа при $T \to \infty$, приведенной в [3].

В случае, когда подпространство импульсов задается с помощью сферических координат (6), для соответствующей функции распределения с интересующим нас свойством получаем из (7)

$$\rho_0(p) = \mathrm{const} \cdot p^2. \tag{14}$$

Аналогично для фотонного газа из (12) имеем

$$\rho_0(\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{const} \cdot \boldsymbol{\nu}^2, \tag{15}$$

что также соответствует излучению черного тела, нагретого до бесконечно большой температуры, т. е. излучению Релея — Джинса.

Среда, равномерно-прямолинейное движение относительно которой принципиально необнаружимо, не может, естественно, и тормозить (или ускорять) движущееся равномерно тело; в частности, и заряженная частица, движущаяся в поле изотропного излучения Релея — Джинса, не должна испытывать торможения. Это обстоятельство указывает, по-видимому, на существование ограничения применимости результата [2, стр. 263—264] о торможении заряженной частицы в поле произвольного изотропного электромагнитного излучения.

Аналогично приведенным результатам для g_0 и ρ_0 можно получить и функции распределения $\eta_0(v)$ и $\mu_0(E)$; с учетом требования сохранения вида функций распределения из (9) и (11) находим

$$\eta_0(v) = \text{const}\cdot\frac{v^2}{(1-v^2/c^2)^{5/2}}, \tag{16}$$

$$\mu_0(E) = \text{const}\cdot E\sqrt{E^2-m^2c^4}. \tag{17}$$

Отметим, что существование сред с функциями распределения вида (13)—(17) вряд ли может быть физической реальностью, поскольку не только температура, но и число частиц среды в единице объема $N \sim \int \rho(p)\,dp$ обращается в бесконечность так же, как и средняя энергия в единице объема $E \sim \int E\mu_0(E)\,dE$, однако полученные результаты имеет смысл рассматривать как указание на некоторые новые физические свойства известных моделей и распределений.

Литература

1. *Д. Л. Синдж.* Релятивистский газ. М., Физматгиз, 1960, стр. 27.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Статистическая физика. М., Физматгиз, 1964, стр. 396.